

H* - ALGEBRE

LORENA TUFAN

Universitatea Spiru Haret, Facultatea de Matematică-Informatică,
tufanl@yahoo.com

Rezumat: În această comunicare în primul paragraf voi demonstra că orice H^* – algebră este o sumă ortogonală de ideale închise, iar în al doilea paragraf voi prezenta construcția unor H^* – algebre.

Cuvinte cheie: produs scalar, topologie, ideal închis, spațiu Hilbert

1. INTRODUCERE

H^* – algebrele au fost introduse și studiate de Ambrose [2] în cazul asociativ, iar teoria a fost extinsă în cazul particular al algebrilor neasociative Lee [6, 7] și Jordan [8, 9]. O contribuție importantă au avut și Cuermica și Rodriguez [5].

2. H* - ALGEBRE CU INVOLUȚIE

Notăm cu K corpul numerelor reale sau corpul numerelor complexe.

Definiția 1. Se numește *algebră liniară și asociativă peste corpul K un spațiu vectorial A peste corpul K împreună cu o aplicație $(x, y) \rightarrow xy$ definită pe $A \times A$ care îndeplinește următoarele axiome:*

- a) $x(yz) = (xy)z$ (asociativitate)
 - b) $x(y + z) = xy + yz$
 - $(x + y)z = xz + yz$
 - c) $(\alpha x)y = x(\alpha y)$
- (1)

pentru oricare $x, y, z \in A$ și $\alpha \in K$

Remarca 1. Axioma (c) este echivalentă cu $(\alpha\beta)(xy) = (\alpha x)(\beta y)$ pentru oricare $x, y \in A$ și oricare $\alpha, \beta \in K$.

În această lucrare toate algebrele vor fi considerate neasociative, iar corpul K va fi considerat ca fiind corpul numerelor complexe.

Definiția 2. Se numește *algebră cu involuție sau *-algebră o algebră A pe care s-a definit o aplicație $x \rightarrow x^*$ care satisface următoarele axiome:*

- a) $(x + y)^* = x^* + y^*$
 - b) $(\alpha x)^* = \bar{\alpha} x^*$
 - c) $(x^*)^* = x$
- (2)

d) $(xy)^* = y^*x^*$
 pentru oricare $x, y \in A$.

Definiția 3. Se numește H^* – algebră o algebră A împreună cu o involuție $*$ numită involuția H^* – algebrei A , algebră pe care s-a definit un produs scalar ce satisface următoarea axiomă:

$$\langle xy, z \rangle = \langle x, zy^* \rangle = \langle y, x^*z \rangle \quad (3)$$

împreună cu care A este spațiu Hilbert.

Propoziția 1. Fie A o H^* – algebră. Produsul $(x, y) \rightarrow xy$ al lui $A \times A$ în A este o funcție continuă.

Demonstrație: Fie (x_n) și (y_n) două șiruri de elemente din A astfel încât $x_n \rightarrow x$ și $y_n \rightarrow y$ în A .

$$\begin{aligned} \|x_n y_n - xy\| &= \|(x_n - x)(y_n - y) + x(y_n - y) + (x_n - x)y\| \\ &\leq \|x_n - x\| \|y_n - y\| + \|x\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\| \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Deci $x_n y_n \rightarrow xy$.

Definiția 4. Fie A o algebră și δ o involuție pe A . Definim mulțimile:

$$H = \{x \in A \mid \delta(x) = x\} \quad (\text{mulțimea elementelor } \delta\text{-hermitiene}) \quad (5)$$

$$S = \{x \in A \mid \delta(x) = -x\} \quad (\text{mulțimea elementelor } \delta\text{-skew-herm}) \quad (6)$$

H și S sunt subspații vectoriale ale lui A și $A = H \oplus S$.

Fie (A, δ) o H^* – algebră cu involuție. Evident structura de spațiu Hilbert a algebrei A determină pe A o topologie. Spunem că H^* – algebra A este *simplic* δ – topologică dacă produsul $(x, y) \rightarrow xy$ este nenul, iar A nu are ideale proprii nenule δ – invariante care să fie închise în topologia considerată.

Prin familie uniformă de H^* – algebre înțelegem o familie $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de H^* – algebre care are proprietatea că există M și N numere reale pozitive astfel încât

$$\|x_\lambda y_\lambda\| \leq M \|x_\lambda\| \|y_\lambda\| \quad \text{și} \quad \|x_\lambda^*\| \leq N \|x_\lambda\| \quad (7)$$

pentru oricare $\lambda \in \Lambda$ și oricare $x_\lambda, y_\lambda \in A$. Aceste două condiții puse asupra familiei de H^* -algebre $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ sunt suficiente pentru a defini o structură de H^* -algebră pentru algebra $A = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, algebră pentru care spațiul Hilbert este

l^2 – suma spațiilor $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, unde prin H_λ am notat spațiul Hilbert al lui A_λ . Mai mult, dacă δ_λ este o involuție pe H^* – algebra A_λ , atunci există un număr real pozitiv P astfel încât

$$\|\delta_\lambda(x_\lambda)\| \leq P \|x_\lambda\| \quad (8)$$

pentru oricare $\lambda \in \Lambda$ și oricare $x_\lambda \in A_\lambda$. În aceste condiții spunem că $\{(A_\lambda, \delta_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ este o familie uniformă de H^* – algebre cu involuție, iar I^2 – suma familiei $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ este acum în mod natural o H^* - algebră cu involuție.

Teorema 1. Fie (A, δ) o H^* -algebră cu involuție. Presupunem că $\text{Ann}(A) = (0)$. Atunci (A, δ) este o I^2 – sumă a unei familii uniforme de H^* – algebre cu involuție $\{(A_\lambda, \delta_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ astfel încât $(A_\lambda, \delta_\lambda)$ este simplu δ_λ – topologică pentru oricare $\lambda \in \Lambda$.

Demonstrație. Din [5, Propoziția 2.5] orice ideal închis al lui A este $*$ – invariant, așa că notăm cu $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ familia tuturor idealelor închise ale lui A . Atunci A este I^2 – suma familiei uniforme de H^* – algebre $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ [5, Teorema 1]. Cum δ este un antiautomorfism al lui A pentru fiecare $\lambda \in \Lambda$ există $\lambda' \in \Lambda$ astfel încât $\delta(B_\lambda) = B_{\lambda'}$, deci sau $\lambda = \lambda'$ sau B_λ și $B_{\lambda'}$ sunt ortogonale. Oricum, în ambele cazuri $B_\lambda + B_{\lambda'}$ este un ideal minimal δ – invariant închis al lui A . Considerăm acum pe mulțimea Λ echivalența:

$$\lambda = \mu \Leftrightarrow B_\lambda + B_{\lambda'} = B_\mu + B_{\mu'} \quad (9)$$

Astfel pentru λ aparținând noii mulțimi Λ definim $A_\lambda = B_\lambda + B_{\lambda'}$ și definim δ_λ pe A_λ ca fiind restricția lui δ la A_λ . Este evident că $\{(A_\lambda, \delta_\lambda)\}$ este o familie uniformă de H^* – algebre cu involuție care satisface teorema.

Remarca 2: Dacă B este un ideal al unei H^* – algebra A , din axioma (3) rezultă că complementul său ortogonal B^\perp este un ideal închis al lui A . Ca o consecință a acestui fapt, datorat teoremei proiecțiilor ortogonale pentru spații Hilbert, este faptul că orice ideal închis al lui A este un sumand direct în A . Acest rezultat se aplică în particular pentru a obține o versiune îmbunătățită a „Teoremei principale a lui Wedderburn’s”: orice H^* – algebră A este o sumă ortogonală a două ideale închise $A = B \oplus \text{Ann}(A)$ unde $\text{Ann}(A) = \{x \in A \mid xA=0\} = \{Ax=0\}$.

3. CONSTRUCȚIA UNOR H^* - ALGEBRE

Fie A și B două H^* – algebre. Presupunem că B este de dimensiune finită. Atunci produsul tensorial de algebre $B \otimes A$ poate fi structurat ca o H^* - algebră având următorul produs scalar și următoarea involuție:

$$\langle y_1 \otimes x_1, y_2 \otimes x_2 \rangle = \langle y_1, y_2 \rangle \langle x_1, x_2 \rangle \quad (10)$$

$$(y \otimes x)^* = y^* \otimes x^* \quad (11)$$

Ca o consecință, dacă n este număr natural și A este o H^* – algebră, algebra $M_n(A)$ a tuturor matricelor cu n linii și n coloane peste A este o H^* – algebră

definită după cum urmează. Considerăm identificarea $M_n(A) = M_n(C) \otimes A$ unde A este o H^* – algebră, iar $M_n(C)$ are o structură de H^* – algebră dată de:

$$(\lambda_{ij})^* = \bar{\lambda}_{ij} \quad (12)$$

$$\langle (\lambda_{ij}), (\mu_{ij}) \rangle = \sum_{i,j} \lambda_{ij} \bar{\mu}_{ij} \quad (13)$$

Definiția 5. O H^* – algebră Springer este o algebră comutativă A cu element unitate e , împreună cu o formă biliniară simetrică nedegenerată $(,) : A \times A \rightarrow C$ care are următoarele proprietăți:

$$\begin{aligned} a) & (xy, z) = (x, yz), \text{ pentru oricare } x, y, z \in A \\ b) & Q(x^2) = Q(x)^2, \text{ oricare ar fi } x \in A \text{ cu proprietatea } (x, e) = 0 \\ c) & Q(e) = \frac{3}{2} \end{aligned} \quad (14)$$

unde $Q(x) := \frac{1}{2}(x, x)$, pentru oricare $x \in A$.

Exemplul 1: Fie A o H^* – algebră comutativă cu element unitate e . Definim pe $A \times A$ cu valori în C o formă biliniară simetrică nedegenerată, astfel:

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y^* \rangle \quad (15)$$

H^* – algebra împreună cu această formă biliniară simetrică este o H^* – algebră Springer.

Propoziția 2. Fie A o H^* – algebră Springer

i) Pentru oricare $x \in A$ avem

$$x^3 - T_s(x)x^2 + S_s(x)x - N_s(x)e = 0 \quad (16)$$

unde

$$T_s(x) := (x, e); S_s(x) := \frac{1}{2}(x, e)^2 - Q(x) \quad (17)$$

și

$$N_s(x) := \frac{1}{6}(x, e)^3 - Q(x)(x, e) + \frac{1}{3}(x^2, x) \quad (18)$$

ii) Dacă pentru oricare $x, y \in A$ definim

$$x \times y = 2xy - (x, e)y - (y, e)x - (x, y)e + (x, e)(y, e)e \quad (19)$$

atunci $N_s(x, y, z) = (x, y \times z)$ pentru oricare $x, y, z \in A$ (unde N_s este unica formă trilineară simetrică definită pe A cu proprietatea $N_s(x) = \frac{1}{6} N_s(x, x, x)$ pentru oricare $x \in A$) și $(x^\#)^\# = N_s(x)$ pentru oricare $x \in A$ (unde $x^\# := \frac{1}{2}(x \times x)$).

Demonstrație. i) Din axioma (c) a definiției 3.1. obținem că $\left(x - \frac{1}{3}(x, e)e, e\right) = 0$ pentru oricare $x \in A$. Aplicând axioma (b) a definiției 3.1. pentru această relație obținem

$$Q\left(\left(x - \frac{1}{3}(x, e)e\right)^2\right) = \left[Q\left(x - \frac{1}{3}(x, e)e\right)\right]^2 \quad (20)$$

ceea ce este echivalent cu:

$$Q(x^2) = Q(x) + (x, e) \left\{ \frac{2}{3}(x^2, x) - (x, e)Q(x) + \frac{1}{3 \cdot 2^2}(x, e)^3 \right\} \quad (21)$$

de unde rezultă în mod evident i)

ii) Acest punct se demonstrează prin simple calcule folosind doar definițiile noțiunilor introduse anterior.

Definiția 6. Fie X și Y spații vectoriale peste corpul numerelor complexe. Fie o formă biliniară nedegenerată $T : X \times Y \rightarrow C$ Fie aplicațiile $(,) : X \times X \rightarrow Y$;

$(x_1, x_2) \rightarrow x_1 \times x_2$ și $(,) : Y \times Y \rightarrow X$, $(y_1, y_2) \rightarrow y_1 \times y_2$ astfel încât aplicațiile $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow N(x_1, x_2, x_3) := T(x_1, x_2 \times x_3)$ și $(y_1, y_2, y_3) \rightarrow M(y_1, y_2, y_3) := T(y_1 \times y_2, y_3)$ sunt forme simetrice trilinare nemule definite pe X respectiv pe Y , care satisfac proprietățile:

$$(x^\#)^\# = N(x)x \text{ și } (y^\#)^\# = M(y)y \text{ pentru orice } x \in X \text{ și orice } y \in Y \quad (22)$$

unde $x^\# := \frac{1}{2}(x \times x)$, $y^\# := \frac{1}{2}(y \times y)$, $N(x) := \frac{1}{6} N(x, x, x)$ și $M(y) := \frac{1}{6} M(y, y, y)$.

Atunci spunem că (T, N, M) este un triplet admisibil pe (X, Y) .

Definiția 7. Se numește algebră structurabilă o H^* – algebră A împreună cu o involuție δ , care are proprietățile:

$$\begin{aligned} a) & (s, x, y) = -(x, s, y) = (x, y, s) \\ b) & (a, b, c) - (c, a, b) = (b, a, c) - (c, b, a) \\ c) & \frac{2}{3} [[a^2, a], b] = (b, a^2, a) - (b, a, a^2) \end{aligned} \quad (23)$$

pentru orice $x, y \in A$, $s \in S$ și $a, b, c \in H$. Am notat cu (\cdot, \cdot, \cdot) (respectiv $[\cdot, \cdot]$) asociatorul (comutatorul) definite pe A .

Propoziția 3. Fie (T, N, M) un triplet admisibil pe (X, Y) . Atunci spațiul vectorial: $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{pmatrix} \mid x \in X, y \in Y \right\}$ cu produsul

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & x_1 \\ y_1 & \beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 & x_2 \\ y_2 & \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 + T(x_1, y_2) & \alpha_1 x_2 + \beta_2 x_1 + y_1 \times y_2 \\ \alpha_2 y_1 + \beta y_2 + x_1 \times x_2 & T(x_2, y_1) + \beta_1 \beta_2 \end{pmatrix} \quad (24)$$

și cu involuția $\delta \begin{pmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & x \\ y & \alpha \end{pmatrix}$ este o algebră structurabilă.

Mai mult, fără a lua în seamă involuția, această algebră este și simplă.

Demonstrație. Faptul că acest spațiu vectorial este o algebră structurabilă se demonstrează prin calcul folosind definițiile.

În continuare arătăm că algebra este simplă. Avem egalitățile:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (25)$$

Din aceste egalități rezultă că dacă I este ideal nenul al algebrei A , atunci I conține pe $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ cu $x \neq 0$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}$ cu $y \neq 0$ și $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dacă $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$

atunci și $\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$ pentru oricare $x \in X$, deoarece $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Analog dacă $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in I$, atunci și $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \in I$ pentru oricare $y \in Y$. Deci I conține

întotdeauna sau pe $\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pentru $x \neq 0$ sau pe $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}$ pentru $y \neq 0$. În acest caz,

cum T este nedegenerată și

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(x,y) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T(x,y) \end{pmatrix} \quad (26)$$

rezultă că I îl conține și pe $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ care este elementul unitate, deci I este egal cu întreg spațiul.

Teorema 2. Fie A o H^* – algebră Springer. Pentru oricare $x, y \in A$ definim:

$$x \times y = 2xy - \langle x, e \rangle y - \langle y, e \rangle x - \langle x, y^* \rangle e + \langle x, e \rangle \langle y, e \rangle e \quad (27)$$

Atunci spațiul vectorial

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in C, x, y \in A \right\} \quad (28)$$

împreună cu produsul

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & x_1 \\ y_1 & \beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 & x_2 \\ y_2 & \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 + \langle x_1, y_2^* \rangle & \alpha_1 x_2 + \beta_2 x_1 + y_1 \times y_2 \\ \alpha_1 y_2 + \beta_1 y_2 + x_1 \times x_2 & \langle x_2, y_1^* \rangle + \beta_1 \beta_2 \end{pmatrix} \quad (29)$$

împreună cu produsul scalar:

$$\left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 & x_1 \\ y_1 & \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 & x_2 \\ y_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \right\rangle := \alpha_1 \bar{\alpha}_2 + \beta_1 \bar{\beta}_2 + \langle x_1, x_2 \rangle + \langle y_1, y_2 \rangle \quad (30)$$

împreună cu involuția H^* – algebrei

$$\begin{pmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{pmatrix}^* := \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & y^* \\ x^* & \bar{\beta} \end{pmatrix} \quad (31)$$

și împreună cu involuția

$$\delta \begin{pmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \beta & x \\ y & \alpha \end{pmatrix} \quad (32)$$

este o H^* – algebră structurabilă simplu topologică a cărei involuție este

$$o^* - \text{involuție, adică } \delta \left(\begin{pmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{pmatrix}^* \right) := \left(\delta \begin{pmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{pmatrix} \right)^*$$

Demonstrație. Din propoziția 3.3. și din propoziția 3.6. rezultă că fără a face referire la produsul scalar și la involuția H^* – algebrei, B este o algebră structurabilă simplă. Restul rezultă prin calcule.

BIBLIOGRAFIE

1. B.N. Allison, *A class of nonassociative algebras with involution containing the class of Jordan algebras*, Math. Ann. 237 (1979), 133-156.
2. W. Ambrose, *Structure theorems for a special Banach algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 57 (1945), 364-386
3. M. Cabrera, J. Martinez, A. Rodriguez, *Structurable H^* – algebras J. Algebra* 147 (1992), 19-62.
4. M. Cabrera, A. El. Marrakchi, J. Martinez, A. Rodriguez, *An Allison-Kantor-Koecher-Tits Construction for Lie H^* – algebras J. Algebra* 164 (1994), 361-408.
5. J. A. Cuenica, A. Rodriguez, *Structure theory for noncumulative Jordan H^* – algebras*, J. Algebra 106 (1987), 1-14.
6. J. R. Schue, „*Hilbert space methods in the Theory of Lie Algebras*”, Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), 68-80.
7. J.R. Schue, *Cartan decompositions for L^* – algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 98 (1961), 334-349.
8. C. Viola Devapakkiam, *Hilbert space methods in the theory of Jordan algebras*, I, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 78 (1975), 293-300.
9. C. Viola Devapakkiam, P. S. Rema, *Hilbert space methods in the theory of Jordan algebras*, II, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 79 (1976), 307-319

Abstract This paper treats the problem of H^* – algebra. This concept was introduced and studied by Ambrose in the associative case and then the theory was extended by Lee and Jordan in nonassociative case.

The paper contents two paragraphs:

- 1) H^* – algebra with involution
- 2) The construction of some H^* – algebras.

The first paragraphs starts with the definition of a H^* – algebra, goes on with some properties of it and ends with an important theorem which says that any H^* – algebra is an orthogonal sum of closed ideals.

The second paragraph contents two parts: in the first one are presented two examples of H^* – algebra (the tensorial product of algebras and the matrix algebra). In the second one are introduced the notions of Springer H^* – algebra and structurable H^* – algebra, some of their presents and a result which says that if we have a Springer H^* – algebra we can construct a simple topological structurable H^* – algebra.