GRAMATICI CONTEXTUALE R-FUZZY

AURORA BACIU
Universitatea Spiru Haret, Facultatea de Matematică-Informatică
ANCA PASCU

Rezumat: În această comunicare se prezintă o nouă fuzzificare a gramaticilor contextuale introduse de Solomon Marcus. Se iau ca structuri algebrice ale mulțimii valorilor de adevăr structurile definite de W. Wechler.

Se introduce noțiunea de algebră R-fuzzy totală şi se arată că ierarhia obținută cu aceste algebre extinde capacitatea generativă a gramaticilor contextuale.

Cuvinte cheie: gramatici contextuale fuzzy, limbaj contextual fuzzy, algebră fuzzy, semiinel partial ordonat

W. Wechler în [4] introduce noțiunile de algebră fuzzy şi algebră R-fuzzy, de la care Gh. Păun în [3] defineşte noțiunile de gramatică contextuală simplă, generalizată şi cu algebre care generează familii de limbaje contextuale.

O mulțime fuzzy este o aplicație $A: X \to Y$, unde X - mulțime finită nevidă, iar Y este mulțimea valorilor de adevăr.

Un limbaj fuzzy este o submulțime fuzzy a lui X^* monoidul liber generat de mulțimea X.

O gramatică, ca mecanism generativ al unui limbaj, poate fi fuzzy-ficată ținând seama de faptul că elementele gramaticii sunt mulțimi fuzzy peste Y şi că s-au definit mai multe structuri algebrice ale mulțimii, valorilor de adevăr (mulțimile R-fuzzy şi mulțimilor L-fuzzy [4]).

În această lucrare se definesc gramaticile contextuale fuzzy luându-se ca mulțimi ale valorilor de adevăr algebrele R-fuzzy. Se introduce noțiunea de algebră R-fuzzy totală. Se studiază ierarhia claselor de limbaje fuzzy ce se obțin cu ajutorul acestor structuri. Ierarhia obținută este mai generală decât cea din [1].

Definiția 1.[4] *O structură algebrică* $(R,\cap,+,\cdot,\to)$ *cu patru operații binare, numite intersecție, sumă, produs şi reziduare se numeşte algebră fuzzy dacă se îndeplinesc următoarele axiome:*

(1) $(A,\cap)$ *este o semilatice;*

(2) $(A,+,\cdot)$ *este un semiinel parțial ordonat;*

(3) $a \to b = 1 \Leftrightarrow a \le b$ *;*

Analele Universității SPIRU HARET, Seria Matematică-Informatică, nr. 1 , 2005, ISSN 1841 - 7833

(4) $a \le a'$ *implică* $a' \to b \le a \to b$ *;*
(5) $b \le b'$ *implică* $a \to b \le a \to b'$.

Definiția 2.[4] *O algebră fuzzy se numeşte algebră R-fuzzy dacă*
$$\{r \in R \mid r = r' \to r'', r', r'' \in R\} = \{0,1\}.$$

Definiția 3.[3] *O gramatică contextuală simplă este un 3-uplu* $G = (V, B, C)$ *unde* V *este un alfabet finit, nevid,* $B \subset V^*$ *este o mulțime numită baza gramaticii şi* $C \subset V^* \times V^*$ *este mulțimea finită a contextelor.*

Limbajul generat de G este
$$L(G) = B \bigcup \{u_n ... u_1 x v_1 ... v_n \mid n \ge 1, x \in B, \langle u_i, v_i \rangle \in C, i = \overline{1,n}\}.$$
Familia limbajelor contextuale simple se notează cu $\boldsymbol{S}$.

Definiția 4.[3] *O gramatică contextuală generalizată este 4-uplu* $G = (V, B, B', C)$ *unde* V*,* B*,* C *au aceeaşi semnificație ca în definiția anterioară iar* $B' \subset V^*$ *este o mulțime finită.*

Limbajul $L(G)$ generat de G este
$$L(G) = B \bigcup \{u_n ... u_1 x y^n v_1 ... v_n \mid n \ge 1, x \in B, y \in B', \langle u_i, v_i \rangle \in C, i = \overline{1,n}\}.$$
Familia limbajelor contextuale generalizate este notată cu $\boldsymbol{G}$.

Definiția 5.[3] *O gramatică contextuală cu alegere este 4-uplul* $G = (V, B, C, \varphi)$ *unde* V*,* B*,* C *au aceiaşi semnificație, iar* $\varphi : V^* \to \boldsymbol{S}(C)$.

Limbajul $L(G)$ generat de G este
$$L(G) = B \bigcup \{u_n ... u_1 x v_1 ... v_n \mid n \ge 1, x \in B, \langle u_i, v_i \rangle \in C, i = \overline{1,n},$$
$$\langle u_1 v_1 \rangle \in \varphi(x), \langle u_i v_i \rangle \in \varphi(u_{i-1} ... u_1 x v_1 ... v_{n-1}), i = \overline{2,n}\}$$

Familia limbajelor contextuale cu alegere este notată cu $\boldsymbol{C}$.
Vom defini gramaticile contextuale fuzzy luând ca mulțimi ale valorilor de adevăr algebrele R-fuzzy.

Definiția 6. *Fie* R *o algebră R-fuzzy. O gramatică contextuală simplă R-fuzzy este 3-uplul* $G = (V, B, C)$ *unde* V *are aceeaşi semnificație ca în definiția 3,* B *este o mulțime R-fuzzy în* V^* *şi* C *este o mulțime R-fuzzy în* $V^* \times V^*$.

Limbajul $L(G)$ generat de G este

Analele Universității SPIRU HARET, Seria Matematică-Informatică, nr. 1 , 2005, ISSN 1841 - 7833

$$L(G)=\left\{y \middle| y\in V^{*} \text{ existã x} \in \text{B, x} \overset{*}{\sim} y\right\}$$

sau $L:V^{*}\to R$ este

$$L(Z)=\sum_{z=u_n\ldots u_1xv_1\ldots v_n} B(x)C(\langle u_1,v_1\rangle)\ldots C(\langle u_nv_n\rangle).$$

Cele două expresii sunt echivalente căci dacă $x\in B$ cu relația "~" care este o relație binară definită pe V^{*} prin

$$y_1\sim y_2 \Leftrightarrow \text{există } \langle u,v\rangle \in \boldsymbol{C} \text{ astfel ca } y_2=uy_1v$$

iar $\overset{*}{\sim}$ este închiderea reflexivă şi tranzitivă a relației "~", avem

$$x\sim u_1xv_1\sim\ldots\sim u_n\ldots u_1xv_1\ldots v_n$$

şi

$$L(z)=\sum_{z=u_n\ldots u_1xv_1\ldots v_n} B(x)C(\langle u_1,v_1\rangle)\ldots C(\langle u_nv_n\rangle)$$

În consecință este evident că dacă $z\in V^{*}$ şi $L(z)$ este suma de mai sus atunci $x\overset{*}{\sim}z$.

Familia limbajelor contextuale simple R-fuzzy se va numi $\boldsymbol{S}_R$.

Definiția 7. *Fie* R *o algebră R-fuzzy. O gramatică cantextuală generalizată R-fuzzy este 4-uplul* $G=(V,B,B',C)$ *unde* B, B' *sunt mulțimi R-fuzzy în* V^{*}*, iar* C *este o mulțimeR-fuzzy în* $V^{*}\times V^{*}$.

Limbajul $L(G)$, generat de G, este $L:V^{*}\to R$,

$$L(z)=\sum_{z=u_n\ldots u_1xy^nv_1\ldots v_n} B(x)[B'(y)]^n C(\langle u_1,v_1\rangle)\ldots C(\langle u_nv_n\rangle)$$

Familia limbajelor contextuale generalizate R-fuzzy se va nota $\boldsymbol{G}_R$.

Definiția 8. *Fie* R *o algebră R-fuzzy. O gramatică contextuală cu alegere R-fuzzy este 4-uplul* $G=(V,B,C,\varphi)$ *unde* B *şi* C *sunt R-fuzzy în* V^{*}*, respectiv* $V^{*}\times V^{*}$.

Limbajul $L(G)$ generat de G este $L:V^{*}\to R$ definit de

$$L(z)=\sum_{z=u_n\ldots u_1xv_1\ldots v_n} B(x)C(\langle u_1,v_1\rangle)\ldots C(\langle u_nv_n\rangle)$$

unde $\langle u_1,v_1\rangle\in\varphi(x)$, …, $\langle u_n,v_n\rangle\in\varphi(\langle u_{n-1},v_{n-1}\rangle)$.

Familia limbajelor contextuale cu alegere R-fuzzy o vom nota $\boldsymbol{C}_R$.

Analele Universității SPIRU HARET, Seria Matematică-Informatică, nr. 1 , 2005, ISSN 1841 - 7833

Definiția 9. *Fie* G *o gramatică contextuală simplă (generalizată, cu alegere) şi* $c \in R$. *Se numeşte limbaj contextual simplu (generalizat, cu alegere) generat de* G *cu pragul* c *dacă*

$$L(G,c) = \{y \in V | L(y) \geq c\}.$$

Familiile limbajelor contextuale simple, generalizate şi cu algebre R-fuzzy vor fi notate cu $\boldsymbol{S}_R$, $\boldsymbol{G}_R$ și $\boldsymbol{C}_R$.

Definiția 10. *O algebră R-fuzzy se numeşte totală dacă pentru orice* $r_1, r_2, ..., r_n, c$ *cu* $r_1 + r_2 + ... + r_n \geq c$, *rezultă că cel puțin un* $r_i \geq c$.

Conceptele de semiinel semiparțial [1] şi algebră R-fuzzy totală sunt diferite.

Teorema 1. *Dacă* R *este o algebră totală R-fuzzy cu 1 ca ultim element, atunci* $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_R$, $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}_R$ *şi* $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_R$.

Demonstrație. Incluziunile $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{S}_R$, $\boldsymbol{G} \subset \boldsymbol{G}_R$ și $\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{C}_R$ sunt evidente, urmează să demonstrăm incluziunile inverse.

Vom demonstra incluziunea $\boldsymbol{S}_R \subset \boldsymbol{S}$, celelalte demonstrându-se similar.

Fie $L \in \boldsymbol{S}_R$. Rezultă că există G şi $c \in R$ astfel încât $L = L(G,c)$. Fie $z \in L$ astfel încât

$$L(z) = \sum_{z=u_n...u_1xv_1...v_n} B(x)C(\langle u_1, v_1 \rangle)...C(\langle u_n v_n \rangle) > c.$$

Să presupunem că $L(z) = r_1 + ... + r_m$, rezultă că dacă există $r_i \geq c$, atunci există x^i, $\langle u_1^i, v_1^i \rangle, ..., \langle u_n^i, v_n^i \rangle$ şi $z = u_n^i ... u_1^i x^i v_1^i ... v_n^i$ ceea ce înseamnă că $B(x^i) \geq c$ şi $C(\langle u_1^i, v_1^i \rangle) \geq c$, $C(\langle u_2^i, v_2^i \rangle) \geq c$ ..., $C(\langle u_n^i, v_n^i \rangle) \geq c$ pentru că $r_i \geq c$ şi în fiecare semiinel cu 1 ca ultim element $r_1 < c$ implică $r_1 ... r_n < c$ pentru fiecare $r_1, r_2, ..., r_n, c$.

Prin definiție $G' = (V, B', C')$ unde $B' = \{x \in B | B(x) \geq c\}$ şi $C' = \{\langle u_i, v_i \rangle \in C | C(\langle u_i, v_i \rangle) \geq c\}$.

Este uşor de observat că dacă $L = L(G')$ atunci $L \in \boldsymbol{S}$ şi deci $\boldsymbol{S}_R \subset \boldsymbol{S}$.

Teorema 2. *Fie* R *o algebră R-fuzzy cu două elemente* r_1 *şi* r_2 *şi* $c < 1$ *astfel ca* $r_1 < c$, $r_2 < c$, $r_1 + r_2 \geq c$ *şi* $r_1^n + r_2^n \geq c$ *pentru orice* $n \in N$, *atunci* $\boldsymbol{S} \underset{\neq}{\subset} \boldsymbol{S}_R$, $\boldsymbol{C} \underset{\neq}{\subset} \boldsymbol{C}_R$.

Demonstraţie. Pentru incluziunea strictă $\boldsymbol{S} \underset{\neq}{\subset} \boldsymbol{S}_R$ să considerăm o gramatică contextuală simplă R-fuzzy $G = (\{a, b, c\}, B, C)$ unde $B : V^* \to R$ este definită de

$$B(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă x} = \varepsilon \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

şi $C : V^* \times V^* \to R$

$$C(\langle u, v \rangle) = \begin{cases} r_1 & \text{dacă } \langle \text{u,v} \rangle = \langle a, b \rangle \\ r_1 & \text{dacă } \langle \text{u,v} \rangle = \langle \varepsilon, c \rangle \\ r_2 & \text{dacă } \langle \text{u,v} \rangle = \langle b, c \rangle \\ r_2 & \text{dacă } \langle \text{u,v} \rangle = \langle a, \varepsilon \rangle \end{cases}.$$

Gramatica G generează cuvinte de forma

$$z_1 = a^{n_1} a^{n_2} ... a^{n_k} b^{n_1} c^{m_1} b^{n_2} c^{m_2} ... b^{n_k} c^{m_k}$$

cu $n_i, m_i \geq 0$, $i = 1, ..., k$ şi $L(z_1) = r_1^n$,

$$z_2 = b^{n_1} b^{n_2} ... b^{n_k} c^{n_k} a^{m_k} ... c^{n_1} a^{m_1}$$

cu $n_i, m_i \geq 0$, $i = 1, ..., k$ şi $L(z_2) = r_2^m$ şi

$$z_3 = a^{q_k} ... a^{q_1} b^{m_1} a^{n_1} b^{n_1} c^{p_1} c^{m_1} ... c^{m_k}$$

cu $n_i, m_i, p_i, q_i \geq 0$ şi

$$L(z_3) = r_1^{n_1} r_1^{p_1} r_2^{m_1} r_2^{q_1} ... r_1^{n_k} r_1^{p_k} r_2^{m_k} r_2^{q_k}.$$

Dar $r_1 < c < 1$ ceea ce implică $r_1^n < c$ şi $L(z_1) < c$. Analog rezultă $L(z_2) < c$ şi $L(z_3) < c$.

Gramatica G generează cuvinte de forma $z = a^n b^n c^n$ cu $L(z) = r_1^n + r_2^n \geq c$.

Analele Universităţii SPIRU HARET, Seria Matematică-Informatică, nr. 1 , 2005, ISSN 1841 - 7833

În consecintă, $L(G,c)=\{a^n b^n c^n \mid n>0\}$ este în $\boldsymbol{S}_R$ dar nu este în $\boldsymbol{S}$ [3].

Ca să demonstrăm că $\boldsymbol{C} \underset{\neq}{\subset} \boldsymbol{C}_R$ să considerăm limbajul $L=\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ care nu este în $\boldsymbol{C}$ [3].

Fie o gramatică contextuală cu alegere R-fuzzy $G=(\{a,b,c\},B,C,\varphi)$ unde B şi C sunt cele definite mai sus şi $\varphi: V^* \to \boldsymbol{P}(C)$ definită prin

$$\varphi(\varepsilon)=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle\}$$
$$\varphi(a^n b^n)=\{\langle a,b\rangle,\langle \varepsilon,c\rangle\},\ n\geq 1$$
$$\varphi(a^n b^n c^m)=\{\langle \varepsilon,c\rangle\},\ n\geq 1 \text{ şi } 1\leq m<n$$
$$\varphi(b^n c^n)=\{\langle b,c\rangle,\langle a,\varepsilon\rangle\},\ n\geq 1$$
$$\varphi(a^m b^n c^n)=\{\langle a,\varepsilon\rangle\},\ n\geq 1 \text{ şi } 1\leq m<n$$
$$\varphi(x)=\varnothing \text{ în rest}$$

care generează L.

Cuvintele $z_1=a^n b^n c^m$ cu $m\leq n$ au $L(z_1)=r_1^{n+m}<c$, $z_2=a^m b^n c^n$ cu $m\leq n$ au $L(z_2)=r_2^{m+n}<c$ şi $z=a^n b^n c^n$ au $L(z)=r_1^p+r_2^p\geq c$.

Ca exemple de algebră R-fuzzy care îndeplineşte condiţiile acestei teoreme $Q=(Q_+,+,\min)$, $r_1=2$, $r_2=3$, $c=4$; $R=(R,+,\cdot)$, $R=\{0,r_1,r_2,1\}$ unde 0 este prim element, iar 1 ultim element, "+" şi "·" sunt definite de tablel

"+"	0	1	r_1	r_2
0	0	1	r_1	r_2
1	1	1	1	1
r_1	r_1	1	r_1	1
r_2	r_2	1	1	r_2

"·"	0	1	r_1	r_2
0	0	0	0	0
1	0	1	r_1	r_2
r_1	0	1	1	0
r_2	0	r_2	0	r_2

$c=1$, $r_1<1$, $r_2<1$ şi $r_1+r_2=1$.

Teorema 3. Fie R o algebră R-fuzzy cu proprietatea că există c,r, $r\geq c$ şi $r^n<c$ pentru fiecare $n\geq 2$, atunci $\boldsymbol{G} \underset{\neq}{\subset} \boldsymbol{G}_R$.

Analele Universităţii SPIRU HARET, Seria Matematică-Informatică, nr. 1 , 2005, ISSN 1841 - 7833

Demonstrație. Să considerăm limbajul $L = \{ab^n a | n \geq 0\} \cup \{ab^n | n \geq 0\}$ care nu este în $\boldsymbol{G}$ [3]. Acest limbaj este generat de o gramatică contextuală generalizată R-fuzzy $G = (\{a, b\}, B, B', C)$ unde

$$B(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacã x} = \varepsilon \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}, \qquad B'(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacã x} = \text{b} \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

$$C(\langle u, v\rangle) = \begin{cases} r & \text{dacã } \langle \text{u, v}\rangle \in \{\langle a, a\rangle, \langle a, \varepsilon\rangle\} \\ 1 & \text{dacã } \langle \text{u, v}\rangle = \langle \varepsilon, \varepsilon\rangle \\ 0 & \textit{altfel} \end{cases}.$$

Fiecare cuvânt $z_1 = ab^n a$ este generat cu $L(z_1) = r$, $z_2 = ab^n$ cu $L(z_2) = r$. Celelalte cuvinte generate cu această gramatică sunt de forma $L(z) = r^n$, $n \geq 2$. Rezultă că dacă $L(G, c) = L$, atunci $L \in \boldsymbol{G}_R$.

Teoremele 2 și 3 dau o ierarhie a algebrelor R-fuzzy care lărgesc capacitatea generativă a familiilor de limbaje $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{C}$.

BIBLIOGRAFIE

1. Bucurescu, A. Pascu *Fuzzy Contextual Grammars*, Rev. Roum. Math. Pures et. Appl. (1986).
2. S. Marcus *Contextual Grammars*, Rev. Roum. Math. Pures et. Appl, 14 (1969).
3. Gh. Păun - Marcus *Contextual Grammars and Languages*. A Survey, Rev. Roum. Math. Pures et. Appl., 24 (1979).
4. W. Wechler *The Concept of Fuzziness in Automata and Languages Theory*, Academic-Verlag, Berlin (1978)

Abstract: In this paper is presented a new fuzzification of contextual grammars introduced by Solomon Marcus. One takes as algebraic structures of the set of truth values, the structures defined by W. Wechler.

The notion of total R-fuzzy algebra is introduced and it is shown that the hierarchy obtained within these algebras extends the generative capacity of contextual grammars.