

MODELE ÎNTREGI CU SUMĂ CONSTANTĂ ȘI VARIABLE CU DOMENIU UNIFORM

SILVIU BĂRZĂ
Universitatea Spiru Haret

Rezumat: Lucrarea de față este o abordare prin programarea procentuală a unei probleme clasice din optimizarea combinatorială, și anume problema de tip rucsac, dată într-un caz particular al problemei generale, altul decât cazul rucsacului 0-1.

Se arată că, în condițiile speciale ale programării procentuale, există un procedeu de reducere a problemei, care prin repetare poate constitui un algoritm eficient de rezolvare a problemei considerate.

Cuvinte cheie: programare liniară, optimizare combinatorială, programare procentuală.

I. INTRODUCERE

În lucrări anterioare am considerat transformarea problemelor procentuale date ca probleme de programare liniară continuă în probleme de programare combinatorială. Am plecat de la problemele procentuale care au forma generală:

$$\begin{cases} \text{opt } cx \\ A^1 x \leq b^1 \\ A^2 x \geq b^2 \\ \mathbf{1} \cdot x = 1 \\ x_i \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

unde, c este vectorul de dimensiune n al coeficienților funcției obiectiv, funcție care cuantifică proprietatea avută în vedere în procesul de optimizare; $A^1 x \leq b^1$ și $A^2 x \geq b^2$ reprezintă sistemul de inecuații prin care sunt exprimate alte proprietăți dorite pentru amestec în anumite limite, A^1 fiind o matrice cu m^1 linii și n coloane, A^2 o matrice cu m^2 linii și n coloane, b^1 un vector de dimensiune m^1 și b^2 un vector de dimensiune m^2 ;

$\mathbf{1}$ este un vector de dimensiune n cu toate componentele egale cu 1 cu ajutorul căruia se exprimă condiția de sumă unitară. În plus, se consideră că toate valorile care

interven în exprimarea modelului sunt nenegative, cele din funcția obiectiv și din membrii drepti ai inecuațiilor condiții fiind chiar pozitiv definite.

În forma extinsă acest model poate fi rescris sub forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{opt} \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{ij}^1 x_i \leq b_j^1 \quad \text{pentru } j = 1, \dots, m^1 \\ \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 x_i \geq b_j^2 \quad \text{pentru } j = 1, \dots, m^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \quad \text{orice } i = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (2)$$

unde, așa cum am văzut mai sus pentru coeficienții funcției obiectiv și pentru valorile matricilor A^1 și A^2 , și pentru vectorii b^1 și b^2 sunt îndeplinite următoarele condiții:

- $c_i > 0$ pentru orice $i = 1, \dots, n$;
- $a_{ij}^1 \geq 0$ pentru orice $i = 1, \dots, n$ și pentru orice $j = 1, \dots, m^1$;
- $a_{ij}^2 \geq 0$ pentru orice $i = 1, \dots, n$ și pentru orice $j = 1, \dots, m^2$;
- $b_j^1 > 0$ pentru orice $j = 1, \dots, m^1$ și
- $b_j^2 > 0$ pentru orice $j = 1, \dots, m^2$.

Pentru evitarea unor neajunsuri care pot apare în rezolvarea acestor probleme și care sunt datorate aproximărilor făcute și lucrului cu valori în general mici am propus o discretizare a modelelor (1) (sau (2)) ajungând la modelul combinatorial de forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{opt} \sum_{i=1}^n c_i y_i \\ \sum_{i=1}^n a_{ij}^1 y_i \leq \alpha b_j^1 \quad \text{pentru } j = 1, \dots, m^1 \\ \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 y_i \geq \alpha b_j^2 \quad \text{pentru } j = 1, \dots, m^2 \\ \sum_{i=1}^n y_i = \alpha \\ y_i \in [0, \alpha] \quad \text{pentru } i = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (3)$$

unde $\alpha = 10^k$, este dependent de precizia stabilită pentru obținerea rezultatelor (prin aproximarea la k zecimale exacte). Acest model poate fi scris condensat sub forma:

$$\begin{cases} \text{opt } cy \\ A^1 y \leq \alpha b^1 \\ A^2 y \geq \alpha b^2 \\ \mathbf{1} \cdot y = \alpha \\ y \in \{0, 1, \dots, \alpha\}^n \end{cases} \quad (4)$$

II. MODEL DE OPTIMIZARE COMBINATORIALĂ CU VARIABILE UNIFORME ȘI CONDIȚIE EXPLICITĂ DE SUMĂ CONSTANTĂ

Considerăm în continuare un caz particular al modelelor de optimizare combinatorială în care vom evidenția separat o condiție particulară cu egalitate și în care domeniile tuturor variabilelor sunt identice. Această problemă este una particulară de tipul rucsac general.

Considerăm că variabilele modelului sunt fiecare în domeniul $\{0, 1, 2, \dots, p\} \in N$. Modelul particular considerat este de forma

$$\begin{cases} \text{opt } cx \\ A^1 x \leq b^1 \\ A^2 x \geq b^2 \\ \mathbf{1} \cdot x = P \\ x_i \in \{0, 1, \dots, p\}, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (5)$$

unde $P \in N$. După cum se poate observa acest model este similar ca formă cu modelul (4), cu deosebirea că aici în locul condiției de tip sumă unitară avem o condiție de sumă constantă.

Din enunțarea modelului este clar că se impune suplimentar condiția $np \geq P$. În adevăr, cum orice i , $p \geq x_i$, prin sumare membru cu membru avem

$$np = \sum_{i=1}^n p \geq \sum_{i=1}^n x_i = P.$$

Astfel, dacă $np \geq P$ nu este îndeplinită, atunci problema (5) nu are soluții admisibile, deci modelul considerat nu are soluții.

Datorită similitudinii modelului (5) cu modelul (4) și a transformărilor bijective care au dus la transformarea modelului (1) în modelul (4), rezultă că modelul (5) poate fi considerat la rândul său un model de programare procentuală.

Modelul (5) este un caz particular de model rucsac general cu variabile uniforme, având condiție explicită de sumă constantă. Putem trage astfel următoarea concluzie:

Propoziție: Clasa modelelor rucsac general cu variabile uniforme și condiție explicită de sumă constantă este subclasă a clasei modelelor procentuale.

În continuare, ca în cazul problemelor de programare procentuală putem considera doar problemele în care coeficienții funcției obiectiv sunt ordonați. Acest lucru nu restrânge generalitatea, deoarece orice problemă poate fi redusă la una având coeficienții funcției obiectiv ordonați prin aplicarea unei permutări asupra variabilelor. De asemenea, vom considera modelul în care optimul căutat este un maxim. Pentru minim se poate proceda similar.

III. CARACTERIZĂRI ALE SOLUȚILOR PENTRU MODELUL RUCSAC GENERAL CU VARIABILE UNIFORME ȘI CONDIȚIE EXPLICITĂ DE SUMĂ CONSTANTĂ

În continuare, deoarece $p, P \in N \subset Z$, putem determina $q, r \in N$ astfel încât $P = pq + r$ și condiția de sumă constantă și fie scrisă sub forma $\mathbf{1} \cdot x = pq + r$, unde q și r se determină pe baza proprietăților de monotonie a vectorilor soluție admisibilă pentru problemele de optimizare procentuală și q reprezintă numărul valorilor x_i egale cu p în vectorii soluție admisibilă.

Propoziție. $q \leq \left\lceil \frac{P}{p} \right\rceil$, unde $\lceil \bullet \rceil$ desemnează partea înțrăgă a unui număr.

Demonstrație. Presupunem că $s \leq \frac{P}{p} < s+1$ și $q \geq s+1$, deci cel puțin primele $s+1$ valori din vectorul x au valoarea p . Astfel,

$$\begin{aligned} \mathbf{1} \cdot x &= x_1 + \dots + x_q + x_{q+1} + \dots + x_n = p + \dots + p + x_{q+1} + \dots + x_n \\ &= pq + x_{q+1} + \dots + x_n \geq pq \geq p(s+1) > p \frac{P}{p} = P \end{aligned}$$

deci $\mathbf{1} \cdot x > P$. Contradicție.

Fie $t = 0$ reprezentând numărul minim de valori x_i egale cu p într-o soluție admisibilă pentru problema (5)

(rel1) Dacă t valori x_i sunt egale cu p , atunci restul valorilor $(n-t)$ sunt cel mult egale cu $p-1$ și astfel, prin înlocuire în modelul (5) se obține

$$\begin{cases} \max p(c_1 + \dots + c_t) + c_{t+1}x_{t+1} + \dots + c_n x_n \\ A^1(p, \dots, p, x_{t+1}, \dots, x_n)^T \leq b^1 \\ A^2(p, \dots, p, x_{t+1}, \dots, x_n)^T \geq b^2 \\ pt + x_{t+1} + \dots + x_n = P \\ x_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}, i = t+1, \dots, n \end{cases} \quad (6)$$

care prin eliminarea constantelor poate fi redus la

$$\begin{cases} \max \bar{c}y \\ \bar{A}^1 y \leq \bar{b}^1 \\ \bar{A}^2 y \geq \bar{b}^2 \\ \mathbf{1} \cdot y = \bar{P} \\ y_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}, i = 1, \dots, n-t \end{cases} \quad (7)$$

unde $y = (y_1, \dots, y_{n-t})$, $\bar{c} = (c_{t+1}, \dots, c_n)$, \bar{A}^1, \bar{A}^2 se obțin din A^1 , respectiv A^2 , prin eliminarea primelor t coloane, $\bar{P} = P - pt$, $\bar{b}_i^1 = b_i^1 - p \sum_{j=1}^t a_{ij}^1$ și

$$\bar{b}_i^2 = b_i^2 - p \sum_{j=1}^t a_{ij}^2.$$

Pentru îndeplinirea condițiilor de admisibilitate cu sumă constantă pentru (7) avem acum $(n-t)(p-1) \geq \bar{P}$, deci

$$n(p-1) + t \geq P$$

Dacă această condiție nu este îndeplinită, atunci t se înlocuiește cu $t+1$ și raționamentul care a început la paragraful (rel1).

Dacă ultima condiție este îndeplinită, atunci s-a obținut un t astfel încât $t \leq q$.

Cum din propoziția anterioară avem $q \leq \left\lceil \frac{P}{p} \right\rceil$, rezultă că procedeul descris mai sus

pentru determinarea lui t se poate aplica doar de un număr finit de ori și astfel constituie un algoritm de determinare a lui q , care produce în plus o reducere a problemei prin restrângerea domeniului variabilelor și eventual scăderea numărului acestora.

IV. CONCLUZII

Lucrarea de față este o abordare prin programarea procentuală a unei probleme clasice din optimizarea combinatorială, și anume problema de tip rucsac, dată într-un caz particular al problemei generale, altul decât cazul rucsacului 0-1.

Se arată că în condițiile speciale ale programării procentuale, există un procedeu de reducere a problemei, care prin repetare poate constitui un algoritm eficient de rezolvare a problemei considerate.

BIBLIOGRAFIE

1. L. Șerbulescu, M. Ciocoiu, S. Bârză, *Optimizarea rețetelor de amestec fibros destinate obținerii fibrelor cardate prin utilizarea algoritmului simplex*, Revista Română de Textile-Pielărie nr.4/2000, pp.11-16;
2. S. Bârză, L. Șerbulescu, *Rezolvarea problemelor de programare liniară prin algoritmul simplex clasic*, Revista Română de textile-pielărie nr. 1/2001, pp. 11-16;
3. S. Bârză, *Principalele instrumente utilizate în formularea problemelor de programare matematică bazată pe combinatorică (retrospectivă)*. Comunicare la simpozionul ICEC-2002, octombrie 2002;
4. S. Bârză, *Programare procentuală: formulări și proprietăți*, Revista de informatică, nr. 1, 2004, Infocrec, București.
5. S. Bârză, *Programare procentuală: proprietăți ale soluțiilor*, Revista de informatică, nr. 2, 2004, Infocrec, București.
6. Goemans M.X., *Semidefinite Programming and Combinatorial Optimization*, Doc. Math. Extra Volume ICM, 1998, 657-666
7. Goemans M.X., Rendl F., *Semidefinite Programming in Combinatorial Optimization*, November 1999
8. Hoffman K.L., *Combinatorial Optimization: Current Successes and Directions for the Future*, Journal of Computational and Applied Mathematics 124 pp.341, 2000
9. Nemhauser G.L., Wolsey L.A., *Integer and combinatorial optimization*, John Wiley & Sons Inc, New York, 1999.

Abstract: This paper presents a class of problems viewed as percentage programming as was introduced earlier. We start from a particular integer programming problems covered by polyhedral linear problem. Our consideration could be important as a better algorithm based on percentage programming properties as was already described.